Concours GE2I/GMEC session 2013

Composition : Mathématiques 3 (algèbre)

Durée : 4 Heures

Dans le cas où un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale très lisiblement sur sa copie, propose la correction et poursuit l'épreuve en conséquence.

Problème I

Partie A

On considère un espace hermitien (E, φ) de dimension n $(n \geq 1)$. On pose $F = E^2$ et tout vecteur $X \in F$ sera noté $X = (X_1, X_2) \in E^2$. Soit ω l'application définie de F^2 dans $\mathbb{C}$ par :

$$\forall X = (X_1, X_2) \in F,\ \forall Y = (Y_1, Y_2) \in F \quad \omega(X, Y) = \varphi(X_1, Y_1) + \varphi(X_2, Y_2)$$

1) Montrer que (F, ω) est un espace hermitien. Quelle est sa dimension?

2) Montrer que $F_1 = E \times \{0\}$ et $F_2 = \{0\} \times E$ sont deux sous espaces supplémentaires orthogonaux de F.

3) Si $\mathcal{B}_E = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormale de E, alors déduire de $\mathcal{B}_E$ une base orthonormale $\mathcal{B}_F$ de F.

4) Soit U l'application définie de F dans F par :

$$\forall X = (X_1, X_2) \in F,\ U(X) = (-X_2, X_1)$$

a) Montrer que U est un endomorphisme unitaire de F.

b) Calculer U^2 et monter que U est la composeé de deux endomorphismes de F dont on explicitera les éléments caractéristiques.

c) Montrer que la matrice de U dans la base canonique de F est de la forme

$M(U) = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$ où I_n est la matrice unité d'ordre n

d) Soient f et g deux endomorphismes de E tels que $f^\star = g$ et $g^\star = f$,

où $f^\star$ est l'adjoint de f . On note par :

$$G(f) = \{(X_1, f(X_1)) \in E^2\}$$

et

$$G(g) = \{(X_1, g(X_1)) \in E^2\}$$

respectivement graphe de f et de g.

Montrer que $G(f)$ et $U(G(g))$ sont deux sous espaces orthogonaux de F.

Partie B: Etude d'un exemple (le cas réel)

On pose $E = \mathbb{R}^2$ et φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

1) Vérifier que (F, ω) est un espace euclidien.

2) Expliciter U et déterminer les valeurs propres de U.

3) Soit f l'endomorphisme de E qui à tout vecteur $X_1 = (x_{11}, x_{12}) \in \mathbb{R}^2$ associe le vecteur $X_1' = (x_{11}, 0)$.

   a) Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint de E.

   b) Montrer que

   $$\Omega_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ x = z \ \ et \ \ t = 0\}$$

   et

   $$\Omega_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ x = -z \ \ et \ \ y = 0\}$$

   sont deux sous espaces orthogonaux de F.

Problème II

Rappels et notations

Etant donnés deux entiers naturels non nuls p et q, $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices à p lignes et q colonnes à coéfficients complexes.

L'ensemble $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{C})$ sera noté $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et I_p désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

On identifiéra par la suite $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ et $\mathbb{C}^p$.

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Pour tout entier naturel n on note $A_n = (a_{ij}(n))_{1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq q}$. On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, si pour tout couple (i,j) tel que $i \in \{1;2;...;p\}$ et $j \in \{1;2;...;q\}$, la suite $(a_{ij}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ coverge dans $\mathbb{C}$. En posant $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_{ij}(n)) = L_{ij}$ et $L = (L_{ij})_{1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq q}$ on dit alors que la matrice L est la limite de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = L$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, pour tout entier naturel n on note A^n la puissance $n^{ième}$ de la matrice A.

Ce problème a pour but de déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Partie A : Etude d'un exemple

On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$x_0 \in \mathbb{R},\quad y_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} x_{n+1} = \frac{4}{5}x_n + \frac{2}{5}y_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{5}x_n + \frac{3}{5}y_n \end{cases}$$

Dans cette partie on pose :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},\ X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ exprimer X_n en fonction de A^n et de X_0.

2) Montrer qu'il existe une matrice diagonale D, telle que la matrice A puisse s'écrire

$$A = PDP^{-1}$$

où P désigne la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ déterminer une expression de A^n en fonction de n.

4) Montrer que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

5) Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent et déterminer les limites de ces suites en fonction de x_0 et y_0.

Partie B : Résultats préliminaires

Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

1) Soient $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(B^n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de matrices de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ qui convergent respectivement vers L et M.

   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}(A_n + B_n) = L + M$.

   b) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha A_n = \alpha L$.

   c) Soient $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes qui converge vers $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n B = \alpha B$.

2) Soit $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ qui converge vers L.

   a) Soit $X \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n X = LX$.

   b) Enoncer sans démonstration un résultat analogue pour le produit à droite.

3) Soit $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que :

$\forall X \in \mathbb{C}^p,\ \lim\limits_{n\to+\infty} A_n X = 0$. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 0$.

Partie C : condition nécessaire

Dans la suite du problème on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ dont la matrice dans la base canonique est A. On définit pour tout entier n, f^n par : $f^0 = id_{\mathbb{C}^p}$ et $f^{n+1} = fof^n$.

On suppose dans cette partie que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1) Soit λ une valeur propre de f $(\lambda \in \mathbb{C})$.

   a) Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

   b) On suppose que $|\lambda| = 1$. Montrer qu'alors $\lambda = 1$.

   On pourra considérer $|\lambda^{n+1} - \lambda^n|$.

2) Montrer que $Ker(f - id) \cap Im(f - id) = \{0\}$ où $id = id_{\mathbb{C}^p}$.

Partie D : condition suffisante

On note $P_f(X) = det(A - XI_p)$ le polynôme caractéristique de f où det désigne le déterminant de la matrice considérée.

1) Montrer que P_f peut se mettre sous la forme : $P_f(X) = \prod_{i=1}^{p}(\alpha_i - X)$ avec $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour tout $i \in \{1; 2; ...; p\}$.

2) Justifier que f admet dans une certaine $(e_1, ..., e_p)$ de $\mathbb{C}^p$ la matrice T suivante :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \alpha_2 & . & . & . & . & . \\ & 0 & \alpha_3 & . & . & . & . \\ & & 0 & . & . & . & . \\ & & & . & . & . & . \\ & & & & . & . & . \\ 0 & & & & & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}$$

3) On suppose dans cette question que $|\alpha_i| \leq 1$ pour tout entier $i \in \{1; 2; ...; p\}$.

   a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(e_1) = 0$.

   b) Montrer par récurrence que pour tout entier $i \in \{1; 2; ...; p\}$, on a :

   $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(e_i) = 0$.

   c) En déduire la limite de T^n puis celle de A^n.

4) On note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ les valeurs propres de f, deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^\star$. On suppose dans cette question que $\lambda_1 = 1$ et $|\lambda_i| < 1$, pour tout $i \in \{2; ...; m\}$. On suppose également que

$$Ker(f - id) \cap Im(f - id) = \{0\}$$

a) Montrer que $Ker(f - id)$ et $Im(f - id)$ sont deux sous espaces supplementaire dans $\mathbb{C}^p$ stable par f.

b) On note par f_1 l'endomorphisme de $Ker(f-id)$ induit par f. Montrer que toute valeur propre de f_1 est une valeur propre de f distincte de λ_1.

c) En remarquant que f_1 vérifit les hypothèses de la question 3), en déduire que A^n converge et déterminer une matrice semblable à sa limite.

Partie E : Conclusion et application

1) On note $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ les valeurs propres de A deux à deux distinctes, avec $m \in \mathbb{N}^\star$.

Déduire des questions précédentes que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$\begin{cases} |\lambda_i| < 1, \ \ \forall i \in \{1; 2; ...; m\}. \\ où \\ \lambda_1 = 1, \ \ Ker(f - id) \cap Im(f - id) = \{0\} \ \ et \ \ |\lambda_i| < 1, \ \ \forall i \in \{2; ...; m\}. \end{cases}$$

2) Etudier la nature de la suites $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

a) $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 0 & \frac{i}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 + \frac{i}{2} & 9 \\ 0 & -4 & 6 + \frac{i}{2} \end{pmatrix}$